

ATODIAD GA36d

MANYLEB ASESU LEFEL 7

Enw'r myfyriwr:	Jac Alexander Donovan	Rhif Adnabod y myfyriwr:	1803745
Rhaglen:	TAR Uwchradd		
Modwl:	Datblygu a Chyfoethogi'r Cwricwlwm		
Cod y modwl:	ECSP7002C	Cyfraniad at Aseiad Cyffredinol y Modwl (%):	100%
Darlithydd:	Helen Denny	Gwiriwr Mewnol:	
Teitl yr Aseiniad:	Astudiaeth Ymchwil yn cynnwys Ffurflen Foeseg	Nifer o eiriau (neu'r cyfwerth):	10,000 words yn cynnwys ffurflen moeseg (i gael ei roi l mewn Ionawr 11 2019)
Dyddiad cyflwyno:	13 Mai 2019	Dyddiad dychwelyd marciau dros dro ac adborth ysgrifenedig:	10 Mehefin 2019
Dull cyflwyno:	Lle bo'n ymarferol ac yn bosibl, rhaid cyflwyno pob asesiad ysgrifenedig drwy Turnitin, oni nodir yn wahanol gan y Darlithydd. (PEIDIWCH â rhoi'r fanyleb asesu hon i mewn i Turnitin neu bydd yn cyfateb i lawer o bethau tebyg yng nghyflwyniadau myfyrwyr eraill.) Dull cyflwyno arall (os ydy'n berthnasol): Bydd cyflwyno'r asesiad yn hwyr yn arwain at ddyfarnu marc cosb. Cosbau am gyflwyno'n hwyr: Hyd at wythnos yn hwyr, uchafswm marc o 50%. Dros wythnos yn hwyr, 0%. Y Panel Amgylchiadau Esgusodol yn unig all gymeradwyo newid dyddiadau cyflwyno.		
Gonestrwydd academiaidd / cyfeirnod:	Mae gonestrwydd academiaidd yn ofynnol. Ym mhrif ran eich cyflwyniad rhaid i chi gydnabod awduron y mae'ch gwaith wedi'i seilio ar eu hymchwil a'u syniadau. Dylech atodi rhestr gyfeiriadau i'ch cyflwyniad sy'n nodi'r llyfrau, erthyglau ac ati rydych wedi'u defnyddio, wedi cyfeirio atynt neu wedi'u dyfynnu er mwyn cwblhau'r asesiad hwn.		

Mae bron pob disgybl sy'n hyn na flwyddyn naw wedi dod ar draws theorem Pythagoras ar ryw ffurf ac mae'n debyg y bydd y mwyafrif yn ei gofio fel rheol sy'n ymwneud â rhifau sgwâr ac ochrau triongl. Er bod hyn ychydig yn wir, mae cymhwyso'r theorem yn gofyn am feddiant o lawer o sgiliau mathemategol sylfaenol, sydd yn gwneud y pwnc yn gyfle gwerthfawr i addysgu a datblygu'r sgiliau y credir eu bod yn angenrheidiol i gael y graddau uchaf posibl ar lefel TGAU (Crawford, 2001).

Er mwyn pwysleisio cyfraniad y theorem i faes mathemateg, mae Kaplan and Kaplan (2011) yn nodi mai'r theorem yw sylfaen ein holl fordwyo yn y byd a thu hwnt, gan ganiatáu i ni anfon rocedi i'r lleuad. Yn cael ei honni i fod yn un o'r theoremau pwysicaf mewn mathemateg, mae ei gyfraniad i'r maes yn fwy na'r theorem ei hun ond mae ei gyflwyniad i'r maes wedi sbarduno darganfyddiadau mathemategol arwyddocaol eraill o ganlyniad, megis darganfod rhifau afresymol (Knill, 2018). Roedd ymddangosiad y rhif afresymol yn y berthynas rhwng meintiau a niferoedd yn dod â chanlyniadau nad yw eu heffaith hyd heddiw yn gwbl ddealladwy. Yn anad dim, cyflwynodd y sylweddoliad syfrdanol na ellir pennu realiti corfforol yn union fel system fathemategol gaeedig, gyfyngedig. Mae yna sgism rhwng geo-fetrigau a haniaethau o rifau oherwydd presenoldeb elfen o'r ffenomena anfeidrol ac annioddefol na ellir eu trin, yn y disgrifiad mathemategol. Hyd at yr ail ganrif ar bymtheg, er enghraifft, roedd yn amhosibl pennu ffenomenau a oedd yn gysylltiedig â chromliniau afreolaidd oherwydd y ffaith bod cromliniau yn cael eu disgrifio gan y rhif afresymol π (Virgen, 2006).

Rydw i wedi dewis y theorem Pythagoras fel y pwnc i'w archwilio ar gyfer y cwestiwn ymchwil hwn oherwydd ei fod yn faes cwricwlwm sy'n gofyn am set sgiliau amryddawn ac amlwrpas sy'n gwobrwyo disgyblion a all gymhwyso eu gwybodaeth i sefyllfaoedd haniaethol. Oherwydd hyn, gellir gwerthuso pob sgil yn annibynnol gan amlygu camdybiaethau disgyblion. Dewiswyd dosbarth blwyddyn 9 i gynrychioli'r grŵp sampl ar gyfer yr astudiaeth, gyda hyn yn amlygiad cyntaf y disgyblion i'r theorem. Mae'r dosbarth sampl wedi'i rhestru fel y trydedd set allan o bedwar, gyda'r disgwyliadau o sefyll yr arholiadau mathemateg ganolradd ar lefel TGAU, felly'n dilyn y cwricwlwm canolradd. Mae'r dosbarth o 26 yn cael eu dysgu yn Ysgol X, sy'n dynodi'r ysgol mewn cwestiynau ar gyfer yr astudiaeth hon. Er mwyn barnu'r ysgol yn ddaearyddol, mae wedi'i lleoli yn Rhanbarth Y lle mae'r rhanbarth wedi'i restru yn y tri isaf o holl ranbarthau Cymru ar gyfer y profion mathemateg genedlaethol. Yn groes i'r stereoteip rhanbarthol, mae gan yr ysgol ffigur prydau ysgol am ddim o 7% sydd yn sylweddol is na'r cyfartaledd cenedlaethol.

Mae'r theorem Pythagoras yn theori adnabyddus sy'n cael ei haddysgu ledled y byd, ond yn ddiddorol mae dull yr addysgu a'r ddealltwriaeth yn amrywio yn dibynnu ar y wlad y mae'n cael ei haddysgu ynddi. Gan fod y cwricwlwm cenedlaethol yn amrywio o wlad i wlad, cefndir addysgol yr athro yw'r ffactor pendant sy'n dylanwadu ar ddull addysgu (Hartweg, 2016). Nid oes gan athrawon Tsieineaidd addysg ffurfiol o safon fel arfer, ond mae rhai astudiaethau wedi canfod bod gan athrawon mathemateg Tsieineaidd ddealltwriaeth ddofn o fathemateg elfennol ac mae ganddynt wybodaeth well o ran cynnwys addysgol ar fathemateg (Ma, 1999). Pwyslais addysgeg fathemategol yn Tsieina yw datblygu gwybodaeth sylfaenol a'r sgiliau sylfaenol sy'n arwain at ganlyniadau mewn cymariaethau rhyngwladol ar raddfa fawr megis y Broses Asesu Addysg yn Rhyngwladol a'r Olympiad Mathemateg Ryngwladol (Zhang, et al., 2004) (Fan & Zhu, 2004). Mae'r dull y mae athrawon Tsieineaidd yn ei gymryd wrth addysgu'r theorem Pythagoras yn adlewyrchu hyn wrth iddynt bwysleisio archwilio theorem a phroffenni mathemategol trwy ddangos senario dysgu adeiladol lle mae myfyrwyr yn cymryd rhan weithredol yn y broses ddysgu o dan reolaeth athro trwy gyfres o weithgareddau bwriadol (Leung & Huang, 2002).

Mae'r wlad wedi profi effeithiolrwydd eu dulliau addysgu ymhellach ar raddfa fyd-eang, gan ei fod yn gyfrifol am ddwy o'r tair gwlad uchaf ym mhrawf rhyngwladol y Rhaglen ar gyfer Asesu Myfyrwyr Rhyngwladol (PISA), felly mae'n rhaid ystyried addysgeg Tsieina yn ystod y broses gynllunio i addysgu'r disgyblion yn Ysgol X (PISA, 2015). Er gwaethaf y llwyddiannau academiaidd fel canlyniad i addysgu dosbarth cyfan, mae'r dull yn cael ei yrru oherwydd ystafelloedd dosbarth mawr. Yn debyg iawn i ran fwyaf o wledydd Asiaidd, maent yn canolbwyntio ar addysgu dosbarth cyfan ynghyd ag addysgu sy'n cael ei yrru gan arholiadau, sef cynnwys yn hytrach na dysgu sy'n canolbwyntio ar brosesau gyda phwyslais ar gof (Lopez-Real, et al., 2004).

Ystyri'r addysgu dosbarth cyfan fel fodel addysgu gweithredol sy'n hyrwyddo deialog a thrafodaeth o ansawdd uchel rhwng athrawon a disgyblion lle disgwylir i ddisgyblion chwarae rhan weithredol mewn trafodaeth trwy ofyn cwestiynau, cyfrannu syniadau ac esbonio a dangos eu meddwl i'r dosbarth (Smith, et al., 2013). Yn gwrthwynebu'r safbwynt hwn, mae llawer yn honni y dylai fod llai o ffocws ar ddulliau dysgu dan arweiniad athrawon a mwy o ffocws ar y canlyniadau dysgu y mae'r myfyrwyr yn gobeithio eu cyflawni (Miller, et al., 1998) (Rust, 2002). Fodd bynnag, nid yw disgyblion yn dysgu o brofiadau personol yn unig ond hefyd yn dysgu trwy arsylwi eu cyfoedion (Muro & Jeffrey, 2008). Mae ymchwil yn honni bod rhyngweithiad deialog trwy addysgu dosbarth cyfan dan arweiniad athro yn creu cyd-destun y gall dysgwyr gymryd rhan weithredol yn eu dysgu eu hunain, a gall yr athro fel arbenigwr addasu'r gefnogaeth y mae dysgwyr yn cyfrannu ati (Anton, 1999) (Ellis, 2003). Yn ogystal, trwy weithredu addysgu dosbarth cyfan, y cyfeirir ato'n aml fel y dull meistrolaeth mathemateg, mae'n sicrhau bod y mwyafrif helaeth o ddisgyblion yn symud ymlaen trwy'r cwricwlwm ar yr un cyflymder, gyda chynnwys wedi'i rannu'n unedau gyda nodau wedi'u diffinio'n glir (Jerrim & Vignoles, 2016). Trwy wneud hyn rydych yn mynnu bod myfyrwyr sy'n wannach yn academiaidd yn cyrraedd lefel sylfaenol o ddealltwriaeth

ym mhob uned cyn i'r dosbarth cyfan symud ymlaen gyda'i gilydd, sy'n annog disgyblion mwy galluog a thalentog i archwilio'r uned ddysgu yn fanylach. Un o fanteision sylweddol y dull hwn yw ei fod yn lleihau'r angen i ail-ymweld â deunydd dro ar ôl tro, ac yn hyrwyddo dyfnder dealltwriaeth dros weithdrefnau ar gof (Micklewright, et al., 2014).

Er mwyn ymchwilio ymhellach i'r lleoliad sy'n effeithio ar addysgu'r theorem Pythagoras, yn groes i Tsieina, cymerodd athrawon yn y Weriniaeth Tsiec ymagwedd weledol fel ffordd o wirio'r theorem, gyda Hong Kong hefyd yn cymryd ymagwedd debyg gan wrthwynebu'r stereoteip Asiaidd (Leung & Huang, 2002). O ganlyniad i'r ymagwedd weledol, gwelir mai dim ond ar lefel cof y mae hanner y disgyblion yn y Weriniaeth Tsiec yn deall y cysyniadau, ond yn Tsieina mae'r disgyblion ar lefel dealltwriaeth llawer dyfnach y dywedir ei bod yn ganlyniad o addysgu dosbarth cyfan (Leung & Huang, 2002). Fodd bynnag, dylid trin y datganiad hwn ag amheuaeth gan fod dealltwriaeth y disgyblion yn gyfyngedig i faint y cynnwys y maent yn agored iddo. Er mwyn ystyried budd y dull Tsiec o addysgu'r theorem, treuliodd yr athro gyfran gymharol uchel o amser ar drefnu ac adolygu yn ystod camau cychwynnol y cyflwyniad, yn hytrach na symud yn uniongyrchol at gyfiawnhad y theorem. Nid yw pwysigrwydd cysylltu â gwybodaeth flaenorol yn cael ei werthfawrogi gan fod gan ddisgyblion strwythur meddyliol sylfaenol fel bod yr holl wybodaeth newydd yn seiliedig ar y sgemâu presennol, felly mae ail-alw gwaith blaenorol yn hanfodol i sicrhau bod dysgu'n digwydd (Piaget, 1936) (Piaget & Cook, 1952) (Nelson, 1980).

Hyd yma, mae'n amlwg o ymchwil bod amrywiaeth o ddulliau i'w cymryd wrth addysgu'r pwnc. Y safbwynt mwyaf dylanwadol sy'n deillio o'r adolygiad llenyddiaeth i'r dull o addysgu theorem Pythagoras yw'r dull meistrolaeth dosbarth cyfan a wneir yn bennaf gan wledydd yn Asia. Er bod maint y dosbarthiadau yn cyfyngu ar yr opsiynau sydd ar gael iddynt, mae ymchwil yn profi mai'r dull hwn yw'r mwyaf llwyddiannus o'i gymharu â gwahanol ddulliau eraill a ddefnyddir o dan amodau tebyg. Mae Anderson (1996) yn honni bod prawf wrth wraidd mathemateg, felly bydd prawf trylwyr o'r theorem yn cael ei addysgu fel elfen allweddol o gyflwyno'r pwnc i'r disgyblion yn Ysgol X. Mae'r datganiad hwn yn cyd-fynd â'r dull meistroli, gan yr ystyrir bod deall prawf yn gollfarn o sicrwydd mewnol ac mae'r ddisgyblaeth o gyflawni prawf o'r fath yn rhan gynhenid o astudio mathemateg (Anderson & Austin, 1995).

Mae'r statws a roddir i brawf yn y cwricwlwm wedi amrywio'n sylweddol yn ystod hanes addysgu mathemateg mewn ysgolion. Fodd bynnag, er gwaethaf rhywfaint o ddiffyg diddordeb mewn addysgu prawf, mae cytundebau cyffredinol rhwng addysgwyr mathemateg bod datrys problemau, sy'n cynnwys chwilio am batrymau, yn chwarae rôl bwysig wrth addysgu mathemateg yn yr ysgol. Er nad yw prawf a datrys problemau'r un fath yn union, maent yn perthyn yn agos iawn. Mae Polya (1990) yn cyfeirio at broblemau i'w profi, fel y theorem Pythagoras a phroblemau i'w darganfod fel nifer y sgwariau, o bob maint, ar fwrdd gwyddbwyll. Mae datrys problemau mathemategol yn cael ei ddehongli fel gweithgaredd sy'n cael ei gyfeirio gan nodau ac sy'n cynnwys dilyniant o weithrediadau sydd â chydran wybyddol sylweddol lle gall y nod gael ei amlygu o ran cynnwys fathemategol (Threadgill-Sowder, 1985). Gellir disgrifio profi, ond nid ei ddiffinio, yn yr un ffordd ac felly gellid ei ystyried fel enghraifft o ddatrys problemau. Oherwydd dyfodiad Rhifedd fel TGAU a'i ddosbarthiad fel pwnc craidd, mae mwy o bwyslais ar feddu ar sgiliau datrys problemau rhagorol sy'n cael eu gwella trwy ddealltwriaeth drylwyr o brofion mathemategol.

Gellir dehongli theorem Pythagoras fel casgliad o sgiliau mathemategol eilaidd, ac er mwyn cymhwyso'r theorem yn gywir, mae'n rhaid meddu ar y sgil i drin gwreiddiau sgwâr ac ail-isradd yn gywir. Gellir galw mynegiadau ail-isradd yn radicalau yn fathemategol. Mae llawer o fyfyrwyr yn ystyried cysyniad haniaethol iawn radicalau ac nid oes ganddynt ddealltwriaeth geometrig bendant o ystyr radical mewn gwirionedd (Sirotic & Zazkis, 2007). Mae myfyrwyr yn cael eu haddysgu'n aml i gofio eiddo a llwybrau byr i weithio gyda radicalau yn algebra. Gall dysgu mathemateg yn y modd hwn rhwystro dealltwriaeth sgiliau rhif myfyriwr a helpu i ddatblygu camsyniadau cyffredin am radicalau a chysyniadau mathemategol cysylltiedig megis mynegrifau, anghymareboldeb, a rhifau cymhleth (Gomez & Buhlea, 2009) (Ozkan, 2011) (Ozkan & Ozkan, 2012). Mae'r cysyniad o radicalau yn cario llawer o elfennau a all achosi dryswch i hyd yn oed y rhai sy'n hyddysg mewn mathemateg (Needham, 1997) (Crisan, 2012). Mae problemau geometrig sy'n cynnwys radicalau yn aml yn gofyn i'r darlennydd osod ystyr corfforol i rif afresymol. Mae ymchwil yn awgrymu nad yw myfyrwyr yn atodi unrhyw ystyr ffisegol neu geometrig i radicalau, yn enwedig radicalau lle nad oes ganddynt radicand sgwâr perffaith (Erlandson, 2013).

Dywedir mai algebra yw'r sylfaen sy'n ehangu gwybodaeth myfyriwr i fathemateg uwch. I amlygu hyn, mae Cyngor Cenedlaethol Athrawon Mathemateg [cyf] yn nodi mai'r rhagofynion ar gyfer perfformio'n dda mewn algebra yw dealltwriaeth o beth yw newidyn a beth mae'r symbolau yn eu cynrychioli mewn problemau mathemategol. Er mwyn cael dealltwriaeth drylwyr o theorem Pythagoras, mae'n angenrheidiol i ddisgyblion ddeall cysyniad newidynnau gan ei fod yn sgil sylfaenol sydd ei hangen yn y pwnc hwn. Mae deall y cysyniad o newidynnau mathemateg yn rhoi cyfle i ehangu a gweithio ar fathemateg lefel uwch fel ffwythiannau a hafaliadau (McNeil, et al., 2010). Mae myfyrwyr angen defnyddio newidynnau ym mhob pwnc mathemategol mewn ystafelloedd dosbarth ysgolion uwchradd a Phrifysgol, a bydd meddu ar y ddealltwriaeth hon o fudd i'r disgyblion i lwyddo yn brofion, ond hefyd i ddeall sgiliau bywyd bob dydd (Dede, 2004) (Stephens, 2005).

Nid tan yr unfed ganrif ar ddeg y cyflwynodd mathemategydd o'r enw Francois Vieta y cysyniad o newidynnau mathemateg (Cajori, 2011). Gyda chyflwyniad Vieta o gyfernodau llythrennol ar gyfer newidynnau ac anhysbysion, mae mathemategwyr bellach yn gallu datrys hafaliadau mewn ffordd ddi-rif. Fodd bynnag, anaml iawn y trafodir cysyniad newidynnau gyda disgyblion er gwaethaf ei gynhwysiad cyson mewn algebra. Yn ôl Dede (2004) mae'r ffaith nad yw newidynnau'n cael eu trafod yn aml yn achosi diffyg dealltwriaeth myfyrwyr o ystyr y cysyniad mewn gwirionedd. Felly, creodd Dede (2004) astudiaeth i ymchwilio i'r anawsterau dysgu y mae myfyrwyr yn eu hwynebu ynghylch cysyniad newidynnau mewn gwahanol senarios. Mae'r astudiaeth yn dod i'r casgliad bod y disgyblion wedi cael trafferth dysgu'r cysyniad o newidyn, yn benodol nid oeddent wedi llwyddo gwneud cyffredinoliadau a haniaethau gyda chymorth o newidynnau (Dede, 2004). Gan gydnabod cymhlethdodau'r disgyblion, mae Stephens (2005) yn credu bod angen i addysgwyr weld algebra nid fel cwrs ynysig ond fel llinyn parhaol o fathemateg sy'n bresennol trwy holl gwricwlwm mathemateg. Yn deillio o'r astudiaeth, darganfuwyd gwybodaeth sy'n ddylanwadol wrth addysgu theorem Pythagoras, sef na all disgyblion ddeall bod dwy lythyren yn gallu cynrychioli'r un rhif, sy'n bosibl yn achos triongl ongl sgwâr isosgeles. Gall dau newidyn yn eu tro gynrychioli'r un gwrthrych ond eto maent yn wahanol lythrennau a gefnogir gan broblem llygod Stephens (2010). Felly, nid yw newidynnau bob amser yn cynrychioli niiferoedd.

Ymhellach, mae dryswch y disgyblion o ran newidynnau yn parhau, gan fod y tueddiad ganddynt i drin y symbolau llythrennol fel labeli ar gyfer yr endidau sy'n cael eu defnyddio, megis 'a' yn cynrychioli afalau yn hytrach na swyddogaeth annibynnol (McNeil, et al., 2010). Gall y dull hwn rwystro cysyniadau myfyrwyr o wybodaeth sylfaenol a fydd yn annog ac yn cefnogi meddwl ar lefel uwch. Mae myfyrwyr yn tueddu i gredu mai dim ond am un gwerth penodol y gall newidynnau sefyll heb ystyried bod newidynnau yn cynrychioli llawer o wybodaeth. Datgelodd astudiaeth a oedd yn ymchwilio i ddealltwriaeth o newidynnau disgyblion blwyddyn 8 fod myfyrwyr yn meddwl am newidynnau fel gwrthrychau, ac nid yr hyn y mae'r newidyn yn ei gynrychioli. Datgelodd yr astudiaeth gydberthynas rhwng dealltwriaeth symbolau a llwyddiant ar dasgau algebraidd (Asquith, et al., 2007). Heb gysyniad o newidynnau bydd myfyrwyr yn parhau i gael trafferth mewn cyrsiau mathemateg lefel uwch. Mae camddealltwriaeth o newidynnau yn golygu nad yw myfyrwyr yn defnyddio newidynnau fel dewis cyntaf wrth ddatrys problemau (Asquith, et al., 2007). Dangoswyd ymchwil pwysigrwydd dealltwriaeth o newidynnau, ac mae dileu camdybiaethau yn hanfodol i sicrhau llwyddiant mewn pwnc algebraidd mathemateg fel theorem Pythagoras.

Un sgil mathemategol ychwanegol sydd ei angen er mwyn cyflawni lefel uchel o ddealltwriaeth o'r testun sy'n cael ei ddysgu, yw'r gallu i ad-drefnu fformiwlâu yn effeithiol. Y camsyniad mwyaf cyffredin sy'n gysylltiedig ag aildrefnu hafaliadau a fformiwlâu yw bod y disgyblion yn cael yr arwydd yn anghywir wrth symud termau o un ochr yr hafaliad i'r llall drwy adio neu dynnu (Rushton, 2014). Yn y cyfnod cymharol gynnar hwn yn nhaith algebraidd y disgyblion, mae ganddynt y duedd i ddysgu fformiwlâu wrth gof sy'n arwain at anawsterau pan ofynnir iddynt ddatrys problemau mathemateg lle caiff newidynnau eu newid neu eu haildrefnu mewn fformiwlâu mathemateg adnabyddus (Sutton, 2012). Mewn dadansoddiad i gamsyniadau o fewn atebion a gyflwynwyd i gymwysterau TGAU mathemateg, darganfu Rushton (2014) fod llawer o ddisgyblion yn defnyddio dull treialu a gwella i ddod o hyd i'r ateb, yn hytrach na datrys yr hafaliad yn algebraidd. Mae'n rhaid mynd i'r afael â'r camsyniad hwn oherwydd natur y cwestiynau sy'n gysylltiedig â theorem Pythagoras, lle gallai fod yn ddigon amhosibl defnyddio'r dull hwn i gael yr ateb cywir.

Camsyniad cyffredin ar wahân sy'n gysylltiedig ag aildrefnu fformiwlâu yw bod hafaliadau yn cael eu haildrefnu neu eu cyfrifo'n anghywir trwy beidio â deall trefn y gweithrediadau. Heb hyfforddiant priodol gan athrawon, efallai y bydd disgyblion yn cael anhawster wrth ddefnyddio trefn gweithrediadau yn syml drwy'r ysgol (Joseph, 2014). Rhan o'r rheswm bod trefn gweithrediadau yn bwnc dyrys i lawer o fyfyrwyr yw oherwydd bod ystyr y mnemonig cyffredin, PEDMAS, a'r cysyniad o grwpio symbolau, yn cael eu hanwybyddu mewn llawer o ystafelloedd dosbarth (Schwartzman, 1996) (Ameis, 2011) (Rogers, 2013). Er mai acronym Seisnig yw hwn, tybir bod disgyblion cyfrwng Cymraeg yn profi anawsterau tebyg oherwydd yr un dull addysgu a ddefnyddir yn eang ledled Cymru, gan ddefnyddio'r term CIRLAT i ddynodi trefn gweithrediadau.

Mae Gardella (2009) yn honni nad yw'r defnydd o acronymau neu foesau yn hyrwyddo dealltwriaeth sgiliau rhif. Nid yw'r C yn sefyll yn uniongyrchol am gromfachau, ond hefyd am fresau, y bar ffracsiwn a'r symbol gwraidd sgwâr (Joseph, 2014). Awgrymwyd ymchwil nad yw'r acronym yn caniatáu dealltwriaeth o grwpio symbolau. Er mwyn i fyfyrwyr gael dealltwriaeth drylwyr o drefn y gweithrediadau, mae'n rhaid i athrawon ddefnyddio gwahanol fathau o symbolau grwpio, nid yn unig cromfachau, mynegiadau a hafaliadau yn eu hystafell ddosbarth (Schwartzman, 1996). Er bod angen dealltwriaeth ddigonol o drefn y gweithrediadau, gellir osgoi'r camsyniadau sylfaenol dyfnach sy'n gysylltiedig â grwpio symbolau yn dibynnu ar ddull addysgu'r theorem Pythagoras. Fodd bynnag, ni ellir osgoi camsyniadau cyffredin gan fod hyn yn arfer addysgu gwael (Abdi, 2006). Ar yr amod bod y wybodaeth newydd a chywir a gyflwynir i'r disgyblion yn fwy dilys, yn fwy pwerus, yn fwy defnyddiol, neu mewn rhyw ffordd arall yn well na'u cysyniadau presennol, yna maent yn debygol o ganiatáu i'r cysyniad newydd ddisodli eu cysyniadau anghywir presennol (Good & Brophy, 1997).

Yn ôl cynllun gwaith yr ysgol, cynghorir y pwnc theorem Pythagoras i'r set uchaf yn unig ym mlwyddyn 9, yna i bob myfyriwr sy'n weddill ym mlwyddyn 10. Mae'n werth nodi bod y cynllun gwaith wedi'i cyffredinoli

ac mae'n ystyried i fod yn gymwysadwy i flwyddyn cymaradwy o ran lefelau cyrrhaeddiad flwyddyn cyffredin, felly mae hyblygrwydd i newid y cynllun gwaith yn unol â hynny. Ar ôl trafod gydag athro'r dosbarth, sydd hefyd yn Arweinydd Pwnc yn Ysgol X, cytunwyd i ddysgu theorem Pythagoras i ddisgyblion y trydydd set ym mlwyddyn 9 gan gydnabod bod gan ddisgyblion y dosbarth y gallu i ddeall y pwnc, er nad yw hyn yn cyd-fynd â'r cynllun gwaith. Er bod hyn yn gwrthdaro â'r cynllun, mae bod yn ysgol arloesol wedi golygu bod Ysgol X wedi dechrau gweithredu'r cwricwlwm newydd a gynigiwyd gan yr Athro Graham Donaldson (Estyn, 2017). Mae hyn yn effeithio ar yr hylifedd o ran y cynllun gwaith oherwydd y prif reswm sy'n sail i Dyfodol Llwyddiannus yw ei fod yn ceisio creu cwricwlwm i bawb sy'n diwallu anghenion presennol y disgyblion orau (Donaldson, 2015). Yn unol â hyblygrwydd y cynllun gwaith mae Rhaglen Astudio Mathemateg gan fod rhyddid i symud rhwng targedau blynyddol yn dibynnu ar gyrrhaeddiad y disgyblion yn y pwnc penodol hwnnw (Llywodraeth Cymru, 2015).

I ystyried manylion adrannol addysgu'r pwnc, mae holl adnoddau a phosteri'r dosbarth yn Ysgol X sy'n seiliedig ar Theorem Pythagoras yn cynnwys labelu ochrau'r triongl ongl sgwâr fel a , b ac c lle mae c yn dynodi'r hypotenuse a a a b yn dwy goes y triongl. Mae nodiant yr ysgol yn unol â'r consensws o nodiant newidynnau wrth ymwneud â theorem Pythagoras, gyda llawer o ymchwilwyr yn dewis y defnydd cyfatebol a thraddodiadol o a , b ac c i ddynodi hydoedd y triongl ongl sgwâr (Nigro, et al., 2000) (Gantert, 2007) (Kaplan, 2007) (Green, 2010) (Charles, et al., 2011) (Kaplan, 2011) (Oppenato, 2011) (Primiani & Carosico, 2011). Yn groes i'r dull adrannol, bydd y system draddodiadol yn cael ei gwrthwynebu i addysgu theorem Pythagoras i ddisgyblion Ysgol X, gan ddewis labelu a , b ac h lle mae h yn dynodi'r hypotenuse a a a b yw dwy goes y triongl. Credir fod yr hyn a ystyriwyd fel camsyniad cyffredin ar newidynnau yn nodwedd fanteisiol o'r dull hwn, gan fod myfyrwyr yn tueddu i addasu dull mnemonig o labelu endidau gan eu bod wedi cael eu hamlygu o oedran cynnar i gysylltu'r llythyr cyntaf â gwrthrych, er enghraifft mae a ar gyfer afal a b ar gyfer baban (Sutton, 2012). Efallai na fydd defnyddio'r nodiant cywir yn ymddangos yn bwysig i'r myfyrwyr, ond mae'n arfer da a fydd yn fuddiol iddynt wrth iddynt symud ymlaen yn eu hastudiaethau o fathemateg, a phan ddefnyddir nodiant clir, mae'r meddwl yn rhydd i feddl am y fathemateg (Zwack, 2009).

Cyfrannodd Leibniz yn bennaf at nodiant algebraidd modern ar gyfer ei waith gyda newidynnau. Ef oedd y cyntaf i ddefnyddio'r llythyr d i nodi differu, ac mae'n gyfrifol am lawer o nodiannau mathemategol a ddefnyddir amlaf heddiw (Cajori, 2011). Yn ddiddorol, mae Leibniz yn tueddu i ddefnyddio dull mnemonig wrth ddiffinio newidynnau sy'n gwrthwynebu digonedd o ymchwil a ystyriwyd hyd yma. Dywedodd Gramelsberger (2011) fod newidynnau yn galluogi defnydd sy'n canolbwyntio ar symbolau heb gyfeiriad symbolaidd ychwanegol ac felly'n rhoi'r gorau i gynrychiolaeth. Yn syml, mae hyn yn nodi bod osgoi gwaith diangen a symbolaeth yn caniatáu i fathemategwyr ganolbwyntio ar y pwnc dan sylw. I gysylltu hyn â chymhwysiad y theorem Pythagoras, os yw'r myfyrwyr yn ystyried h i gynrychioli'r hypotenws yna bydd y disgyblion yn cyfyngu gwybyddiaeth egniol ar gamau cynnar y datrysiaid, wrth ddyrannu newidynnau i gynrychioli ochrau'r triongl, gan ryddhau'r meddwl i ganolbwyntio ar yr wybodaeth ofynnol i gyrraedd yr ateb cywir. Ymhellach, canfuwyd bod amrywiaeth o ffactorau yn dylanwadu ar allu myfyrwyr i gofio newidynnau, fel gall profiad blaenorol o ddefnyddio'r newidyn hwnnw achosi rhwystr. Yn yr achos o ddefnyddio c , mae'n newidyn a ddefnyddir yn gyffredin mewn fformiwla'u trionglog eraill, felly bydd y disgyblion yn cael eu hamlygu i'r fantais o ddefnyddio newidyn gwahanol h ar gyfer achos unigryw theorem Pythagorean. Roedd ymchwil i newidynnau a'i gysylltiad â'r theorem yn darparu canlyniadau croes. Sylwyd bod camsyniadau cyffredin myfyrwyr am newidynnau yn cynnwys edrych arnynt fel talfyriadau neu labeli yn hytrach na chynrychioli meintiau, sy'n awgrymu bod dynodi'r hypotenws fel h yn fwy cyfleus i fyfyrwyr (Stephens, 2005) Yn wahanol i'r casgliad hwn, dangosodd astudiaeth ar wahân fod perfformiad yn well pan nad oedd y symbolau a ddefnyddiwyd mewn ymadroddion yn gysylltiedig yn ofeiriol â'r gwrthrychau na phan oedd y symbolau yn gysylltiedig yn ofeiriol â'r gwrthrychau (McNeil, et al., 2010). Yn y bôn, nid oes digon o dystiolaeth i sefydlu'r naill ddull na'r llall, felly gwnaethpwyd penderfyniad rhwng yr athro dosbarth a'r arweinydd pwnc i fynd ati i addysgu theorem Pythagoras gan ddefnyddio'r nodiant a , b ac h .

Y duedd i ofyn sut i wneud rhywbeth, yn hytrach nag archwilio natur rhywbeth, yw, mewn ffordd, ymateb pragmatig i realiti a phrysurddeb bywyd (McAteer, 2013). Felly, yn hytrach na gofyn am gyngor, bydd ymchwil yn cael ei chynnal i archwilio dulliau addysgu posibl y pwnc yn ogystal â phenderfynu ar y technegau priodol i ddileu camsyniadau cyffredin posibl i sicrhau bod disgyblion yn cael dealltwriaeth drylwyr o'r gwaith sy'n cael ei addysgu. Heb ddull gweithredu ymholgar, gall ein hymgysylltiad â chysyniadau a phrosesau aros ar lefel gymharol arwynebol. Er mwyn darganfod a mynd i'r afael â chamdybiaethau disgyblion o fewn pwnc theorem Pythagoras, caiff ymchwil weithredol ei weinyddu er mwyn ddarganfod y camsyniadau hyn a defnyddio nifer o strategaethau i addysgu'r pwnc i ymchwilio i'w heffeithiolrwydd wrth oresgyn camdybiaethau o'r fath. Gellir ystyried ymchwil fel continwwm o ddulliau, gydag ymchwil wyddonol ar un pen a'r ymagweddau mwy naturiol ar y llaw arall (McAteer, 2013). Mae ymchwil gweithredol ar ddiwedd naturiolaidd y continwwm, sy'n cwmparu ystod o ddulliau sy'n tueddu i gael eu nodweddu gan awydd i archwilio, esbonio neu ddisgrifio arfer. Mae ymchwil weithredol yn dod o dan ymarél eang ymchwil ymarferwyr.

Mae ymchwil weithredol yn archwilio ac yn damcaniaethu ymarfer, yn newid, yn gwerthuso ac yn datblygu ymarfer, yn darparu llwyfan i feirniadu ideoleg, ac wrth wneud hynny mae'n ymgorffori dimensiwn

moesol yn ogystal ag epistemolegol i'r ymchwil (McAteer, 2013). gan Elliott (1991) syniad mai nod sylfaenol ymchwil weithredol yw gwella arfer, sy'n gwneud cyswllt clir ac eglur ag arfer. Fodd bynnag, er mwyn cynnal y gwrthdaro rhwng ymchwil a gweithredu, rhwng theori ac ymarfer, mae'n rhaid i'r broses ymchwil weithredol fod yn broses gylchol, fel bod canfyddiadau pob cylch yn llywio cynllunio a chynnal y cylch dilynol (Elliott, 1981) (Kemmis & McTaggart, 1981). Y ffordd orau o ddangos y rhyngweithiadau cylchol a chilyddol hyn yw Winter (1987), sy'n awgrymu, er bod y posibilrwydd o newid yn wahaniaeth rhwng gweithredu ac ymchwil, ei fod yn gofyn am gysylltiad agos ac egwyddorol rhwng y ddau, er mwyn i ddarganfyddiadau ymchwil drosglwyddo yn ôl i'r fyd gweithredol.

Dangoswyd camsyniadau cyffredin nodweddiol gwahanol na'r camgymeriadau damweiniol a wna myfyrwyr. Gall disgyblion gywiro camgymeriad damweiniol a wnânt. Fodd bynnag, os oes camsyniad cyffredin penodol yn bodoli mewn disgyblion, y peth cyntaf a wnânt pan fyddant yn gwneud camgymeriad yw amddiffyn eu hunain yn unol â hynny a cheisio profi i'r rhai sy'n eu hargyhoeddi bod yr hyn y maent yn ei wybod yn gywir (İşleyen & Mercan, 2013). I atal camgymeriadau cyffredin, mae'n rhaid nodi'r camsyniadau hyn, a rhaid datblygu deunyddiau i'w leihau. O hyn ymlaen, cynhelir ymchwil weithredol gan ei fod yn astudiaeth systematig sy'n cyfuno gweithredu a myfyrio gyda'r bwriad o wella ymarfer (Ebbutt, 1985). Fodd bynnag, mae ymchwil weithredol yn herio disgrifiad hawdd. Rhan o'r anhawster yw amrywiadau methodolegol ymchwil weithredol, y disgrifir ymarfer yr ymchwil gan Weade a Green (1989) fel teulu, rhai ohonynt yn mabwysiadu dull confensiynol ac eraill yn radical yn eu hymdrechion i newid addysg er gwell. Y dull cyntaf i'w ystyried yw ymagwedd cadarnhaol ymchwil gweithredol. Fel sy'n wir am enghraifft Gregory, nodweddir ymchwil cadarnhaol gan athrawon, gan nodi newidynnau ar wahân a damcaniaethau posibl sy'n berthnasol i broblem sy'n cael ei phrofi trwy gynnal arbrofion bach ac adrodd ar ganlyniadau (Taba & Noel, 1957). Er bod llawer o ymchwilwyr gweithredol wedi argymhell diystyru'r dull cadarnhaol, i ymchwilwyr gweithredol eraill mae'n un argyhoeddiadol a diogel.

Dull arall i'w ystyried ar gyfer ymchwil gweithredol fyddai'r dull dehongli. Yn wahanol i'r dull cadarnhaol, mae'n galluogi ymchwilwyr i ddod o hyd i hyblygrwydd yn yr ymagwedd hon nad yw ar gael i ymchwilwyr gweithredol sy'n gweithio o fewn y dull cadarnhaol (McCutcheon & Jung, 1990). Mae cyd-destun y sefyllfa addysgu yn cynyddu o ran pwysigrwydd strategol, mae bwriad yr actorion yn cael ei holi, mae deinameg y berthynas gymdeithasol yn cael ei harchwilio, a thrwy gydol yr ymchwil, mae rhywfaint o ryngweithio deialog rhwng athro a myfyriwr wedi'i gynnwys yn agored (Bogdan & Biklen 1982). Mae Trantner (1986) yn defnyddio ysgrifennu cyfnodolyn i ymchwilio i'w realiti goddrychol personol wrth fynd i ysgol newydd. Mae'n ymddangos bod gan yr ymagwedd hon le ar gyfer cwestiynau sy'n adlewyrchu'r ymdeimlad o ryngweithio cymdeithasol, bwriadoldeb yr actor, pwrpas, a gwerth y pwnc ymchwil. Yn yr un modd, mae Anning (1986) yn gofyn iddi hi ei hun: Beth wnaeth y disgyblion mewn gwirionedd? Beth wnes i? Beth ddysgais i? Beth ydw i'n bwriadu ei wneud nawr? Mae hunan fyfyrion yn elfen hanfodol o'r dull hwn (Rowan, 1981) (Waxman, et al., 1988). Bydd y rhan fwyaf o'r data a gesglir gan yr ymagwedd dehongli i ymchwil gweithredol yw data ansoddol. Mae ymchwil ansoddol yn ceisio astudio'r sefyllfa gyfan er mwyn gwerthuso'r cymhlethdod a sicrhau bod eu casgliad yn ystyried ffactorau unigryw a chyffredinol. Fodd bynnag, mae'r math hwn o ddata yn seiliedig ar lawer o ragdybiaethau ac mae ganddo anfanteision mawr fel na ellir ymestyn eu canfyddiadau i boblogaethau ehangach sydd gyda'r un lefel o sicrwydd y gall dadansoddiadau meintiol (Atieno, 2009). Mae hyn oherwydd nad yw canfyddiadau'r ymchwil yn cael eu profi i ddarganfod a ydynt yn arwyddocaol yn ystadegol neu yn ganlyniad ar hap, felly, mae'r defnydd o ymchwil ansoddol yn yr ystafelloedd dosbarth yn dod yn ddibwys oherwydd nad ydynt yn gallu cymharu'n effeithiol â dulliau neu ddsbarthiadau eraill.

Amrywiad pellach yn yr ymagwedd at ymchwil gweithredol yw'r persbectif gwyddoniaeth feirniadol, sef dilysiad y damcaniaethwr beirniadol (Carr & Kemmis, 1986) (Grundy, 1987) Mae'n hanfodol i ddiddordeb mewn gwybodaeth fel rhywbeth rhydd. Mae damcaniaethwyr beirniadol yn golygu'r cydadwaith rhydd rhwng gweithredu a myfyrio (McCutcheon & Jung, 1990). gweithredu ar ei ben ei hun yn ddigwyfeiriad ac mae myfyrio ynddo'i hun yn ddi-nod. Mae'r symudiad dilechdidol rhwng gweithredu a myfyrio yn ystyried cymhlethdodau'r ffactorau ymarferol a chymdeithasol-ddiwylliannol sy'n ei gwneud yn bosibl i ddatgelu anghydraddoldebau sylfaenol, sydd yn ei dro yn ei gwneud yn bosibl symud i ryddfrenio (Grundy, 1987). Mae'r cydbwysedd rhwng gweithredu a myfyrio y mae'r dull gwyddonol beirniadol yn ei gynnig, yn ogystal â'i allu i werthuso data meintiol yn effeithiol, yn gwneud y dull hwn yn arf ymchwil ffafriaeth wrth ddechrau archwilio'r cwestiwn ymchwil.

O ganlyniad i'r adolygiad llenyddiaeth, penderfynwyd ymgymryd ag ymagwedd ranbarthol tuag at addysgu theorem Pythagoras oherwydd ei fod yn cynnwys nifer o sgiliau unigol, a phan fyddant yn cael eu cyfuno mae'n caniatáu dealltwriaeth effeithiol o'r pwnc. Defnyddir adrannu yn y gwyddorau dysgu a gwybyddiaeth i ddynodi'r ffenomenon sy'n digwydd pan fydd gan unigolyn ddau sgema cysyniadol gwahanol, a allai fod yn gwrthdaro o ran parth penodol yn eu strwythur gwybyddol (Gagatsis, 2012). Felly, trwy fynd at yr addysgu yn y modd hwn, mae gorgyffwrdd sgemâu yn gyfyngedig, gan obeithio caniatáu dealltwriaeth ddyfnach o sgiliau unigol. Ymhellach, dangoswyd hyn yn y rhagbrawf a'r ôl-brawf a roddwyd i'r disgyblion sampl o'r ymchwil hwn, lle'r oedd y sgiliau'n cael eu profi yn unigol ac ar y cyd. Defnyddiwyd y rhagbrawf a'r ôl-brawf er mwyn asesu

effeithiolrwydd dulliau addysgu, gan ddarparu data meintiol i ddangos gwahaniaethau yng nghyrhaeddiad y disgyblion cyn ac ar ôl yr ymyriad.

Yn gyntaf, penderfynais addysgu'r disgyblion sut i sgwario ac ail israddio yn gywir, ond, cond, cyn unrhyw addysgu, aseswyd gwybodaeth flaenorol y disgyblion. Mae asesu gwybodaeth flaenorol yn thema barhaus drwy gydol yr ymyriad. Mae digonedd o ymchwil addysgol wedi dangos bod datblygu sylfaen wybodaeth gyfunedig a chynhyrchiol yn dibynnu ar wybodaeth flaenorol y dysgwyr (Alexander, et al., 1992) (Pressley & McCormick, 1995) (Dochy, et al., 1999). Ymhellach, honnir mai problem gyffredin a wynebwr gan hyfforddwr mewn addysg yw bod gan fyfyrwyr ddiffyg gwybodaeth a sgiliau blaenorol pwysig sydd eu hangen pan fyddant yn dechrau ar y cyrsiau uwch yn eu cwricwlwm (Batchelor, 2004) (Kelly & Glaspole, 2006). Mae gwybodaeth flaenorol wedi cael ei hystyried ers tro fel y ffactor pwysicaf sy'n dylanwadu ar ddysgu a chyflawniad myfyrwyr (Dochy, et al., 2002) (Hailikari, et al., 2008). Er enghraifft, gall anghywirdebau mewn gwybodaeth neu gamsyniadau cyffredin blaenorol fod yn niweidiol i ddysgu yn y dyfodol os na chânt eu nodi a'u cyfeirio'n uniongyrchol (Chinn & Brewer, 1993) (Guzzetti, et al., 1993).

I gynnig y cwestiynau ar sgwario ac ail israddio, roedd yn hanfodol dewis y rhifau o fewn y cwestiynau yn effeithiol. Gall dewis rhifau yn ofalus ganiatáu i ddisgyblion ddefnyddio gwahanol strategaethau mathemategol sy'n caniatáu i ymchwilyr ddysgu am ddulliau dewisol myfyrwyr (Zazkis & Hazzan, 1998). At hynny, mewn astudiaeth ar rannu, dewiswyd y niferoedd fel bod cymwysadau amlwg o eiddo rhanadwyaeth wedi'u dileu yn ofalus i asesu dealltwriaeth disgyblion o gysyniadau elfennol theori rhif (Zazkis & Campbell, 1996). Gofynnwyd i'r disgyblion sgwario'r rhif 3, ac i ail israddio'r rhif 9. Dyma'r cwestiynau a ddefnyddiwyd i asesu gwybodaeth flaenorol y disgyblion. Yn yr achos hwn, dewiswyd y niferoedd i ddangos y berthynas rhwng y ddau weithrediad, mai un yw'r gwrthdro i'r llall. Roedd gan y mwyafrif o'r disgyblion ddealltwriaeth gymharol dda o sut i sgwario rhifau yn gywir cyn addysgu'r pwnc hwn, gyda 65% o ddisgyblion ($n = 23$) yn cael atebion cywir ar gyfer y ddau gwestiwn priodol yn y rhagbrawf. Ar y llaw arall, dim ond hanner y disgyblion a oedd yn gallu cynhyrchu un ateb cywir pan ofynnwyd iddynt ail israddio rhif yn y rhagbrawf, gan nodi gwendid cyffredin, a ddylanwadodd ar y penderfyniad i ganolbwyntio ar y berthynas rhwng sgwâr ac ail isradd i atgyfnerthu'r wybodaeth y maent eisoes yn ei hadnabod. Dangosodd y llwyddiant ar ôl y prawf llwyddiant yn y dull addysgu, gyda 92% o ddisgyblion ($n = 25$) yn cael y ddau gwestiwn ail isradd yn gywir.

Camsyniad cyffredinol ynglŷn â theorem Pythagoras yw'r diffiniad o'r term 'hypotenws' a'r arwyddocâd y mae'n ei gynnal ar gymhwyso'r theorem yn gywir. Cyn y dilyniant hwn o wersi, ni allai un disgybl labelu'n gywir hypotenws triongl, gyda llawer yn labelu hypotenws ar driongl anghyfochrog. Nid yw perthnasedd yr hypotenws yn hanfodol yn unig ar gyfer dibenion labelu, ond os nad oes hypotenws gan driongl yna mae'r theorem yn ddiangen. Camsyniad a ddarganfuwyd o ddisgyblion mwy mathemategol Ysgol X a brofwyd, oedd eu bod yn deall mai'r hypotenws yw ochr hiraf y triongl, ond ni waeth a oedd y triongl yn driongl ongl sgwâr ai peidio. Yn ystod yr esboniad, fe wnes i sicrhau hyn, gyda chwestiynau yn arddangos ar bwynt pŵer i ddilyn lle'r oedd disgyblion wedyn yn gorfod eu hateb ar fyrddau gwyn bach. Mae labelu'r hypotenws yn gwestiwn cyflym na ddylid ei ymhelaethu, felly mae'r penderfyniad a wnaed i leihau'r amser a ddyrennir i addysgu'r sgil hon. Dywedir bod defnyddio byrddau gwyn bach yn gwella ansawdd y dysgu (Swan, 2006). Mae'n well gan fyfyrwyr i dderbyn adborth ar unwaith, sef y sail y seilir y dull asesu hwn arni. Mae'r dull o ateb nes ei fod yn gywir yn ymgysylltu dysgwyr wrth gywiro ymatebion anghywir yn y lle cyntaf, sy'n chwarae rôl hanfodol wrth gaffael gwybodaeth, yn cynorthwyo i ymgorffori gwybodaeth gywir mewn prosesau gwybyddol, ac yn caniatáu adfer atebion cywir yn ystod profion (Epstein & Brosvic, 2002).

Yn dilyn pob cwestiwn a ofynnwyd i'r disgyblion, dewiswyd un disgybl i ailadrodd ei benderfyniad ynglŷn â pham y dewisodd yr ateb hwnnw, lle wnes i ysgogi ailadrodd diffiniad cywir o'r hypotenws. Pan ddysgir termau trwy ailadrodd dywedir eu bod yn cael eu cofio'n well a bod y cynnwys yn cael ei gadw am gyfnod amser uwch (Zhan, et al., 2018). Roedd gwelliant ar unwaith, gyda chyfran gynyddol o ddisgyblion yn cael atebion cywir i bob cwestiwn. Ar gyfer y cwestiwn labelu terfynol, gofynnwyd i'r disgyblion ateb fel pâr, a rhoddwyd munud iddynt drafod a dadlau i gytuno ar ateb i adrodd yn ôl i'r dosbarth. Y cwestiwn ofynnais oedd labelu hypotenws ar driongl anghyfochrog. Manteision gweithgaredd 'Think-Pair-Share' yw bod gan y disgyblion, trwy drafod ag aelod arall o'r dosbarth, fwy o hyder i gyfranogi mewn trafodaeth ddosbarth o'i gymharu â phan ofynnir i'r disgybl adrodd yn ôl yn unigol (Sampsel, 2013). fantais arall yw trwy annog trafodaeth, mae'r amser aros y disgyblion yn cynyddu cyn cael eu galw i ateb, gan gynyddu'r tebygolrwydd o ymgysylltiad disgyblion (Rowe, 1974). Wrth i mi gylchu'r ystafell ddosbarth, roedd ansawdd y wybodaeth a ddefnyddiodd y disgyblion er mwyn cyfleu eu dehongliadau mathemategol i'w partner wedi creu argraff araf. Roedd yn bwysig amrywio'r arddull ddysgu i ganiatáu cyfathrebu, oherwydd mae dysgu'r disgyblion yn gwella wrth gydweithio ag eraill (Azlina, 2010). Ar ôl y drafodaeth, disgynnodd llawer am y camsyniad cyffredin, ac roedd hyn yr amser gorau i ailgyfeirio'r broblem, trwy atgyfnerthu'r diffiniad o'r hypotenws. Mae camgymeriadau yn aml yn well ar gyfer dysgu nag atebion cywir (William, 2006). Fodd bynnag, er na allai neb labelu'r hypotenws yn gywir cyn y gwersi a ddarparwyd, atebodd 40% o ddisgyblion ($n = 25$) y cwestiwn hwn yn anghywir ar ôl y prawf, a brofwyd i fod y sgil a berfformiwyd gwaethaf ar ôl ymyrraeth.

Wedi'i berswadio gan ymchwil, i gyflwyno'r theorem roeddwn wedi penderfynu defnyddio animeiddiad sy'n profi dilysrwydd y theorem, gan gymhwyso'r syniadau a ddaeth â llwyddiant mewn ystafelloedd dosbarth yn Hong Kong drwy ddefnyddio cymhorthion gweledol i atgyfnerthu'r fathemateg (Leung & Huang, 2002). Gwrthodwyd cyflwyno'r theorem trwy brawf algebraidd oherwydd lefel cyrhaeddiad isel y dosbarth yn gyffredinol, gan nad ydynt yn meddu ar y sgiliau algebraidd sydd eu hangen i ddilyn y prawf, lle gall arwain at ddatgysylltu a drysu disgyblion. Gyda grwpiau â chyrhaeddiad isel, mae athrawon yn defnyddio strategaethau pedagogaidd mwy priodol, a llai heriol yn gyffredinol, gyda'r nod o ddarparu mwy o sgaffaldiau i ddysgu disgyblion ac i gynnal cymhelliant (Dunne, et al., 2007). Roedd y rhain yn cynnwys cyfarwyddiadau arafach, gweithgareddau rhyngweithiol mwy ymarferol a mwy o ddefnydd o ysgogiadau gweledol. Cyn unrhyw gysylltiad â theorem Pythagoras, dim ond dau ddisgybl allai gynhyrchu ateb cywir, a oedd yn fwy o lwc na barn. Er mwyn cymharu â'r atebion a ddarparwyd yn yr ôl-brawf, fe wnaeth pob un ond dau ddisgybl ateb yr un cwestiwn yn gywir, sef cyfradd llwyddiant o 92%. Credaf fod datblygiad amlwg y disgyblion yn cael ei gyfiawnhau gan fy awydd i addysgu'r pwnc yn berthynol, yn hytrach nag yn gyfryngol.

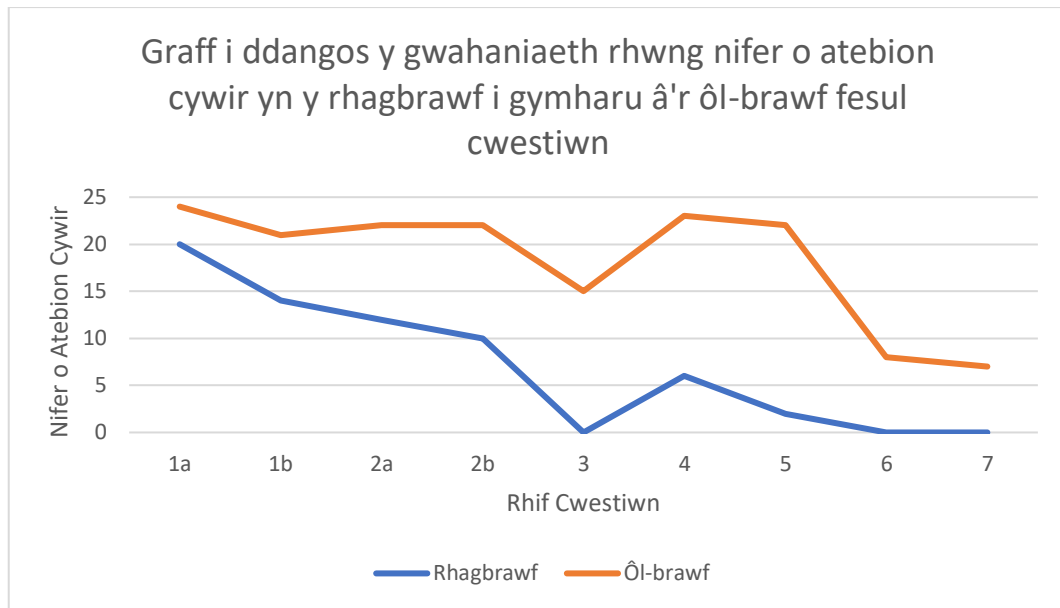
O fewn addysg fathemateg, mae dealltwriaeth gyfryngol yn golygu gwybod yn syml yr algorithmau neu'r gweithdrefnau ar gyfer datrys problem, yn y bôn yn cofio'r wybodaeth ar y cof. Mae dealltwriaeth berthynol, ar y llaw arall, yn cynnwys cynhyrchu atebion o wybodaeth egwyddorol (Woodruff, 2005). Gan bwysleisio'r amhwysigrwydd y dull dysgu cyfryngol, mae Skemp (1976) yn honni nad yw'n ystyried dealltwriaeth gyfryngol i fod yn ddealltwriaeth o gwbl. Mae dysgu mathemateg berthynol yn cynnwys adeiladu strwythur cysyniadol y gall ei feddiannydd gynhyrchu nifer ddiderfyn o gynlluniau ar gyfer cael unrhyw bwynt gorffen o unrhyw fan cychwyn yn ei sgema. Mantais nodedig o ddysgu perthynol dros gyfryngol yw mai'r mwyaf cyflawn o sgema disgyblion, po fwyaf yw ei deimlad o hyder yn ei allu ei hun i ddod o hyd i ffyrdd newydd o ddarganfod ateb heb gymorth allanol (Skemp, 1976). Mae dealltwriaeth berthynol yn sail i'r holl weithgareddau a gynhelir yn yr ymyriad. Mae ymchwil ychwanegol yn anghefnogi'r dull dysgu cyfryngol annigonol, gan fynnu bod athrawon yn anymwybodol o'r gwallau a'r camsyniadau cyffredin y mae'r disgyblion yn eu cael ganddynt (Sarwadi & Shahrill, 2014).

Elfen sylfaenol o'r ymyriad a addysgir yn berthynol oedd y sgil i ddefnyddio fformiwla Pythagoras yn gywir i ddatrys ar gyfer yr hypotenws. Fel y crybwyllwyd yn flaenorol, tybir fod y dull addysgu yn llwyddiannus oherwydd y cynnydd sylweddol a wnaed gan y disgyblion, a ddangoswyd ganddynt yn yr ôl-brawf. Er bod ei ddiffygion, mae CIRLAT yn dechneg addysgu briodol yn yr ysgol gyfun. Ar hyn o bryd, pan nad yw llawer o fyfyrwyr yn barod yn ddatblygiadol i atodi ystyr mwy haniaethol i symbolau, y nodau yw cynhyrchu cyfrifiad cywir a'r pwyslais ar yr angen i gael trefniant gweithrediadau yn y lle cyntaf (Taff, 2017). Trwy ddyfalarhad, ailadroddwyd y gweithrediadau mathemategol sydd eu hangen ar gyfer cyfrifiannu yn ystod pob ateb gan ddefnyddio iaith i esbonio fy meddyliau mathemategol. Os yw mathemategydd eisiau cyfrannu at gorff o wybodaeth fathemategol, rhaid iddo allu cyfleu ei syniadau mewn ffordd sy'n ddealladwy i eraill (Lee, 2010). Credir y gall y dull hwn fod yn berthnasol i'r athrawon sy'n trosglwyddo gwybodaeth i'r disgyblion. Mae Lee (2010) yn nodi mai rhan bwysig o allu ysgrifennu mathemateg yn dda yw gwybod pryd i ddefnyddio symbolau a gwybod pryd i ddefnyddio geiriau. Ar gyfer cyfrifiant anodd, fel theorem Pythagoras, efallai na fydd y disgyblion yn dilyn pob cam yn rhwydd felly dylid defnyddio geiriau i ddisgrifio'r camau rydych chi'n eu cymryd i atgyfnerthu'r wybodaeth maent yn eu gwybod eisoes. Mae deall geirfa yn cyfrannu'n fawr at ddealltwriaeth gyffredinol mewn llawer o feysydd cyd-destun, gan gynnwys mathemateg (Riccomini, et al., 2015). Cafodd y disgyblion eu hamlygu'n barhaol i derminoleg fathemategol, ac mae ymchwil yn dangos bod iaith yn elfen ganolog o lwyddiant mathemateg, a gall gwybodaeth gyffredinol myfyriwr o eirfa fathemategol ragfynegi perfformiad mathemategol mewn arholiadau (van der Walt, 2009) (Seethaler, et al., 2011).

Gan gyfeirio at yr hyn a nodwyd yn flaenorol, ni ddylai'r disgyblion a addysgwyd yn yr astudiaeth hon, yn unol â'r cynllun gwaith, fod wedi dod i gysylltiad â theorem Pythagoras ar hyn o bryd yn eu taith fathemategol. Felly, dim ond sut i gyfrifo'r hypotenws a ddysgwyd, o wybod hydoedd dwy goes y triongl. Os oedd gan y disgyblion lefel uwch o gyrhaeddiad, yna byddai'n bosibl gofyn iddynt gyfrifo un o goesau triongl ongl sgwâr o ystyried yr hypotenws a'r goes arall, trwy lawdrin theorem Pythagoras. Ond, gan fod yr ymyriad yn seiliedig ar addysgu'r cynnwys yn berthynol, nid oedd gan y disgyblion y sgiliau algebraidd perthnasol i ddeall yn wirioneddol yr hyn y byddent yn ei wneud yn fathemategol, hynny yw byddent yn dysgu'r cynnwys yn gyfryngol. Mae Skemp (1976) yn amlygu'r gwahaniaeth enfawr rhwng y technegau dysgu cyfryngol a pherthynol, trwy eu disgrifio fel dau bwnc gwahanol yn gyfan gwbl wedi'u lleoli o dan ymbarél mathemateg. Cafodd y senario ei gyfalafu a'i drin fel cyfle i brofi dealltwriaeth berthynol yn erbyn cyfryngol yn unig.

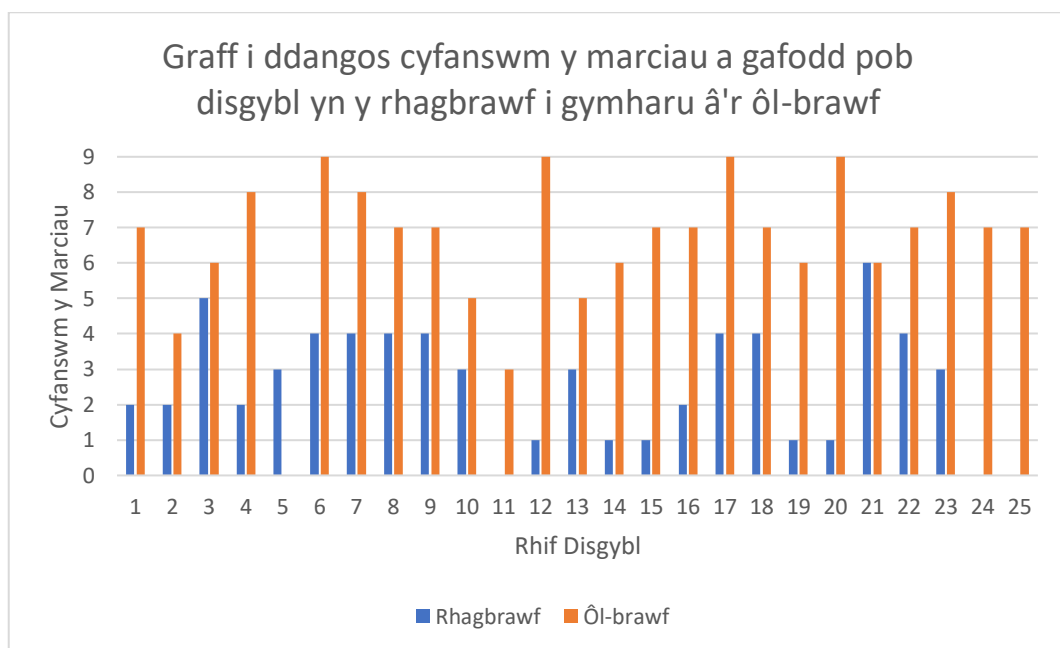
Er mwyn asesu effeithiolrwydd techneg dysgu berthynol, gofynnwyd i'r disgyblion gyfrifo hyd driongl ongl sgwâr, lle rhoddwyd addasiad o theorem Pythagoras a ail-drefnwyd yn barod i'r disgyblion i'w gymhwyso heb rannu unrhyw wybodaeth o'i darddiad, felly nid oes gan ddisgyblion unrhyw ddealltwriaeth o sut y cafodd ei deillio. Ystyriwyd bod hyn yn ddealltwriaeth gyfryngol o'r theorem, lle cyflwynir ffeithiau heb unrhyw ystyr arwyddocaol iddynt. Yn y ddau gwestiwn hyn, lle profwyd dulliau addysgu cyfryngol yn unig, dim ond 28% (n = 25) o ddisgyblion a gwblhaodd y cwestiynau'n gywir, sydd yn sicr y cwestiynau a berfformiwyd gwaethaf yn y prawf. Fel y gwelir o Ffigur 1, mae dadansoddiad data lefel eitem yn dangos gwelliannau ym mhob cwestiwn

ymchwil, ond cwestiynau wyth a naw oedd y gwaethaf o'r cyfan. Bellach gellir dweud bod dysgu cyfryngol wedi'i annilysu ac ystyrir ei fod yn isradol i dechneg dysgu berthynol.



Ffigwr 1. Graff i ddangos y gwahaniaeth rhwng nifer o atebion cywir yn y rhagbrawf i gymharu â'r ôl-brawf fesul cwestiwn

Yn y pen draw, roedd y technegau dysgu a ddangoswyd yn yr astudiaeth ymchwil hon i gyd yn llwyddiant i ddileu camsyniadau cyffredin, oherwydd y gwelliant ym mhob cwestiwn y cafodd y disgyblion eu profi arnynt. Nod yr astudiaeth oedd dileu camdybiaethau mewn disgyblion, a gyflawnwyd fel y nodir yn Ffigwr 2. Er bod dulliau addysgu perthynol yn sail i'r ymyriad cyfan, mae'n werth ystyried effeithiolrwydd y dulliau cyfrifiannu ar gyfer pob sgil yr ystyriwyd ei bod yn bwysigrwydd cymhwyso theorem Pythagoras. Trwy asesu ymatebion disgyblion yn yr ystafell ddosbarth, roedd llawer o'r rheini yn gwerthfawrogi'r defnydd o ddelweddau i atgyfnerthu'r theorem ac yn egluro eu bod yn deall y fathemateg yn fwy oherwydd hyn, sy'n debyg i ymateb y rhai yn Tsieina (Leung & Huang, 2002). Yr hyn nad yw mor amlwg gan ganlyniadau ar yr arwyneb, ond sy'n dylanwadu ar y llwyddiant ar y cyfan yw'r penderfyniad i bwysleisio'r berthynas rhwng sgwâr ac ail isradd. Gan ei fod yn sgil a ddefnyddir yn gyffredin yn y pwnc hwn, roedd camsyniadau cyffredin yn gyfyngedig ac felly'n galluogi disgyblion i ganolbwyntio ar gymhwyso'r theorem yn gywir (Gramelsberger, 2011) (Chinn & Brewer, 1993).



Ffigwr 2 - Graff i ddangos cyfanswm y marciau a gafodd pob disgybl yn y rhagbrawf i gymharu â'r ôl-brawf

Ar ôl adolygu'r wybodaeth a gasglwyd, er bod data pwysig yn cyd-fynd â llenyddiaeth, mae'n ddadleuol a oedd y gwelliant sylweddol yn deillio'n uniongyrchol o'r technegau ymyrryd ai peidio. Er mwyn asesu'n feirniadol ddilysrwydd y canlyniadau hyn, gellir dadlau mai'r atebion gwael a ddangoswyd yn y rhagbrawf oedd oherwydd nad oedd y disgyblion wedi dysgu'r cynnwys o'r blaen yn hytrach nag atebion anghywir oherwydd nifer sylweddol o gamsyniadau cyffredin. Y camau nesaf i'w cymryd i ddilyn ymholiad yn y cwestiwn ymchwil i addysgu dau ddosbarth cyfochrog ynglŷn â lefel cyrhaeddiad. Trwy ddysgu nifer o ddosbarthiadau, gellir arbrofi â dulliau addysgu cyferbyniol i gymharu canlyniadau un dosbarth i'r llall fel canlyniad i ymyriadau gwahanol. Yn achos y cwestiwn ymchwil hwn, byddai un dosbarth yn cael ei addysgu'n gyfryngol gyda'r llall yn berthynol, gan y bydd yn tystio a yw'r cynnydd sylweddol yn digwydd o ganlyniad i ddulliau addysgu perthynol.

Cyfngiad tebyg ac yr un mor amlwg o'r ymchwiliad a gynhaliwyd yn Ysgol X, yw mai dim ond un dosbarth a ddewiswyd fel y grŵp sampl, gan adlewyrchu dim ond lleiafrif o'r grŵp blwyddyn. I ymchwilio yn ddyfnach, roedd yr ymchwiliad i ganolbwyntio ar ddulliau addysgu a chamdybiaethau disgyblion blwyddyn 9 yn gyffredinol, nid yn unig un dosbarth yn Ysgol X. Felly, cyfngiad yr astudiaeth oedd maint y sampl a'i adlewyrchiad bach o'r wlad yn gyffredinol. Oherwydd bod nifer gymharol fach o ddisgyblion ar y gofrestr yn Ysgol X, mae eu cyfraniad at ragfynegi camdybiaethau blwyddyn 9 ledled y wlad yn ddibwys. Casglu data meintiol oedd y dull a ddewiswyd i'w ddefnyddio drwy gydol yr ymchwiliad, felly mae'n werth ystyried beth fyddai maint y sampl lleiaf ar gyfer yr ymchwiliad hwn. Er mwyn ystyried poblogaeth yr ymchwiliad fel nifer y disgyblion ym mlwyddyn 9 ledled y wlad, ynghyd â lefel hyder o 90% ac ymyl gwall o 5%, mae ymchwil yn awgrymu y dylai o leiaf 269 o ddisgyblion fod wedi'u hystyried ar gyfer y casgliadau i fod yn gyfiawn (Suresh & Chandrashekara, 2012) (Llywodraeth Cymru, 2018). Felly, er mwyn datblygu'r ymchwiliad hwn, ac wrth wneud hynny yn ei wneud yn fwy dilys, rhaid ystyried maint sampl uwch.

Syniad ar sut i ddosbarthu'r sampl uwch fyddai asesu gwahanol rannau o'r wlad i gynyddu dilysrwydd ei gynrychiolaeth o'r wlad. Er hynny, mae ymchwil wedi dangos bod yr un camgymeriadau mathemategol yn digwydd gyda myfyrwyr ledled y byd yn annibynnol o ble maent yn byw. Mae'r canfyddiad hwn yn awgrymu nad yw addysgu da, neu ddrwg, yn ymwneud llawer â llunio camsyniadau. Fodd bynnag, mae'n arwain at y syniad bod myfyrwyr yn llunio cysyniadau yn organig, sy'n golygu bod myfyrwyr yn aml yn ceisio gwneud synnwyr o'r byd yn naturiol trwy eu dehongliadau eu hunain sy'n cael eu dylanwadu gan y wybodaeth fathemategol a dderbynnir gan addysgwyr (Swan, 2001). Yn ogystal, roedd y disgyblion o'r sampl i gyd o'r trydedd set, ac yn dilyn y cwricwlwm a fydd yn arwain at sefyll papur canolradd ar lefel TGAU. Mewn astudiaeth ar wahân, tybiwyd y byddai myfyrwyr gweithredol ffurfiol yn dal llawer llai o gamsyniadau na'u cyd-ddisgyblion dosbarth diriaethol. Er mwyn yr astudiaeth hon, mae myfyrwyr gweithredol ffurfiol yn cynrychioli disgyblion o gyrhaeddiad uwch, gan y gallant gynhyrchu perthnasoedd rhesymegol ymhlith y dystiolaeth a beichiogi amgen. Cafodd yr ymatebion eu categorïddio yn nhermau nifer y camsyniadau sy'n bresennol o gymharu â gallu rhesymu. Yr unig newidyn myfyriwr yn gyson ac yn sylweddol sy'n gysylltiedig â nifer y camsyniadau oedd gallu rhesymu; felly, cafwyd cefnogaeth ar gyfer y rhagdybiaeth o'r astudiaeth. Felly, er mwyn gwella cywirdeb canlyniadau, dylid ystyried disgyblion o ystod cyrhaeddiad.

Llyfryddiaeth

- İsleyen, T. & Mercan, E., 2013. Examining the Difficulties Experienced by 8th Grade Students on the Subject of Square Root Numbers. *Journal of Theory and Practice in Education*, 9(4), pp. 529-543.
- Abdi, S. W., 2006. Correcting Student Misconceptions. *Science Scope*, Volume 1, p. 8.
- Alexander, P. A., Kulikowich, J. A. & Schulze, S. K., 1992. *How subject-matter knowledge affects recall and interest*, Brussels: XXV International Congress of Psychology.
- Ameis, J. A., 2011. The truth about pemdas. *Mathematics Teaching In The Middle School*, 16(7), pp. 414-420.
- Anderson, J., 1996. Patterns which aren't are!. *Mathematics in School*, 24(2), pp. 20-22.
- Anderson, J. & Austin, K., 1995. Paradigms of proof. *The Mathematical Gazette*, 79(486), pp. 489-495.
- Anning, A., 1986. Curriculum in action. In: D. Hustler, A. Cassidy & E. C. Cuff, eds. *Action research in classrooms and schools*. London: Allen & Unwin, pp. 56-66.
- Anton, M., 1999. A learner-centered classroom: Sociocultural perspectives on teacher-learner interaction in the second language classroom. *The Modern Language Journal*, Volume 83, pp. 303-318.
- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J. & Alibali, M. W., 2007. Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), pp. 249-272.
- Atieno, O. P., 2009. An Analysis of the Strengths and Limitations of Qualitative and Quantitative Research Paradigms. *Problems of Education in the 21st Century*, Volume 13, pp. 13-18.
- Azlina, N. A. N., 2010. CETLs: Supporting Collaborative Activities Among Students and Teachers Through the Use of ThinkPair-Share Techniques. *IJCSI International Journal of Computer Science Issues*, 7(5), pp. 18-29.
- Batchelor, H., 2004. The importance of mathematics diagnostic test for incoming pharmacy undergraduates. *American Journal of Pharmaceutical Education*, Volume 4, pp. 69-74.
- Cajori, F., 2011. *A History of Mathematical Notations: Two Volumes Bound as One*. Mineola, NY: Dover Publications.
- Cajori, F., 2011. *A history of mathematical notations; Two volumes bound as one*. Mineola, NY: Dover Publications.
- Carr, W. & Kemmis, S., 1986. *Becoming critical: Education, knowledge and action research*. Philadelphia: The Falmer Press.
- Charles, R. I. et al., 2011. *Integrated Algebra*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.
- Chinn, C. A. & Brewer, W. F., 1993. The role of anomalous data in knowledge acquisition: A theoretical framework and implications for science instruction. *Review of Educational Research*, Volume 63, pp. 1-49.
- Crawford, D., 2001. Pythagoras' theorem - more than just a Square Rule. *Mathematics in School*, 30(1), pp. 14-17.
- Crisan, C., 2012. What is the square root of sixteen? Is this the question?. *Mathematics Teaching*, 230(1), pp. 21-22.
- Dede, Y., 2004. The concept of variable and identification its learning difficulties. *Educational Science: Theory & Practice*, 4(1), pp. 48-56.
- Dochy, F. J. R. C., De Ridjt, C. & Dyck, W., 2002. Cognitive prerequisites and learning. *Active Learning in Higher Education*, Volume 3, pp. 265-284.
- Dochy, F., Segers, M. & Buehl, M. M., 1999. The Relation Between Assessment Practices and Outcomes of Studies: The Case of Research on Prior Knowledge. *Review of Educational Research*, 69(2), pp. 145-186.
- Donaldson, G., 2015. *Successful Futures*, s.l.: Llywodraeth Cymru.
- Dunne, M. et al., 2007. *Effective Teaching and Learning for Pupils in Low Attaining Groups*, s.l.: Department for Children, Schools and Families.
- Ebbutt, D., 1985. Educational action research: some general concerns and specific quibbles. In: R. Burgess, ed. *Issues in Educational Research: Qualitative Methods*. Lewes: Falmer, pp. 152-174.
- Elliott, J., 1981. *A Framework for Self Evaluation in Schools*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Elliott, J., 1991. *Action Research for Educational Change*. Milton Keynes: Open University Press.
- Ellis, R., 2003. *Task-based Language Learning and Teaching*. s.l.:Oxford Applied Linguistics.
- Epstein, M. L. & Brosvic, G. M., 2002. Students Prefer the Immediate Feedback Assessment Technique. *Psychological Reports*, Volume 90, pp. 1136-1138.
- Erlandson, K. M., 2013. *A Study of College Students' Misconceptions of Radical Expressions*. M. Thesis: State University of New York.
- Estyn, 2017. *A report on Ysgol Llanhari*, Caerdydd: Estyn, Arolygiaeth Ei Mawrhydi dros Addysg a Hyfforddiant yng Nghymru.
- Fan, L. H. & Zhu, L., 2004. How have Chinese students performed in mathematics? A perspective from large-scale international comparisons. In: L. Fan, N. Wong, J. Cai & S. Li, eds. *How Chinese learn mathematics*. Singapore: World Scientific, pp. 3-26.
- Gagatsis, A., 2012. Compartmentalization in Learning. In: N. M. Seel, ed. *Encyclopedia of the Sciences of Learning*. Boston, MA: Springer.
- Gantert, A. X., 2007. *Intergrated Algebra 1*. New York, NY: AMSCO School Publications.
- Gardella, F., 2009. Order of operations: A natural beginning. *New York State Mathematics Teachers' Journal*, Volume 59, pp. 15-20.
- Gomez, B. & Buhlea, C., 2009. The ambiguity of the sign $\sqrt{}$. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Volume 4, pp. 509-518.
- Good, T. L. & Brophy, J. E., 1997. *Looking in classrooms*. New York: Longman.
- Gramelsberger, G., 2011. What do numerical (climate) models really represent?. *Studies in History and Philosophy of Science*, 42(1), pp. 296-302.
- Green, R., 2010. *New York State Coach Empire Edition: Mathematics, Grade 7*. New York, NY: Triumph Learning.
- Grundy, S., 1987. *Curriculum: Product of discovery*. Philadelphia: The Falmer Press.
- Guzzetti, B. J., Snyder, T. E., Glass, G. V. & Gamas, W. S., 1993. Promoting conceptual change in science: A comparative meta-analysis of instructional interventions from reading education and science education. *Reading Research Quarterly*, Volume 28, pp. 117-155.
- Hailikari, T., Katajavuori, N. & Lindblom-Ylänne, S., 2008. The Relevance of Prior Knowledge in Learning and Instructional Design. *American Journal of Pharmaceutical Education*, 75(5), pp. 1-8.
- Hartweg, B., 2016. *Factors influencing planetarium educator teaching methods at a science museum*, s.l.: Planetarian.
- Jerrim, J. & Vignoles, A., 2016. The link between East Asian 'mastery' teaching methods and English children's mathematics skills. *Economics of Education Review*, Volume 50, pp. 29-44.
- Joseph, K. N., 2014. *College Students' Misconceptions of the Order of Operations*. Fredonia, New York: MSc Thesis, State University of New York.
- Kaplan, J. D., 2007. *New York State Coach March-to-march Edition: Mathematics, Grade 7*. New York, NY: Triumph Learning.
- Kaplan, J. D., 2011. *New York State Empire Edition Workout: Mathematics, Grade 8*. New York, NY: Triumph Learning.
- Kaplan, R. & Kaplan, E., 2011. *Hidden Harmonies: The Lives and Times of the Pythagorean Theorem*. 1 ed. s.l.:Bloomsbury Press.
- Kelly, N. & Glaspole, S. E., 2006. Formative assessment as a learning aid for pharmacy calculations – a theory based design. *American Journal of Pharmaceutical Education*, Volume 6, pp. 27-31.
- Kemmis, S. & McTaggart, R., 1981. *The Action Research Planner*. Victoria: Deakin University Press.
- Knill, O., 2018. *Some Fundamental Theorems in Mathematics*. s.l.:Harvard University.
- Lee, K. P., 2010. *A guide to writing mathematics*. s.l.:s.n.
- Leung, K. S. F. & Huang, R., 2002. How Pythagoras' theorem is taught in Czech Republic, Hong Kong and Shanghai: A case study. *ZDM*, 34(6), pp. 268-277.
- Llywodraeth Cymru, 2015. *Cwricwlwm Cymru: Rhaglen Astudio ar gyfer Mathemateg, Cyfnodau Allweddol 2–4*, s.l.: Llywodraeth Cymru.
- Llywodraeth Cymru, 2018. *GCSE entries and results (pupils in Year 11/pupils aged 15) by subject group*, s.l.: Llywodraeth Cymru.
- Lopez-Real, F., Mok, A. C. I., Leung, K. S. F. & Marton, F., 2004. Identifying a pattern of teaching: An analysis of a Shanghai Teacher's Lessons. In: L. Fan, N. Wong, J. Cai & S. Li, eds. *How Chinese learn mathematics*. Singapore: World Scientific, pp. 382-412.

- Ma, L. P., 1999. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- McAteer, M., 2013. *Action Research in Education*. s.l.:SAGE.
- McCutcheon, G. & Jung, B., 1990. Alternative Perspectives on Action Research. *Teacher as Researcher*, 29(3), pp. 144-151.
- McNeil, N. M. et al., 2010. A is for apple: Mnemonic symbols hinder the interpretation of algebraic expressions. *Journal of Educational Psychology*, 120(3), pp. 625-634.
- Micklewright, J. et al., 2014. *Teachers in England's Secondary Schools: Evidence from TALIS 2013*, London: Department for Education.
- Miller, A. H., Imrie, B. W. & Cox, K., 1998. *Student Assessment in Higher Education: A Handbook for Assessing Performance*. London: Routledge.
- Muro, M. & Jeffrey, P., 2008. Identifying Leader Social Cognitions: Integrating the Causal Reasoning Perspective into Social Cognitive Theory. *Journal of Leadership & Organizational Studies*, 10(4), pp. 2-11.
- Needham, T., 1997. *A visual complex analysis*. New York: Oxford University Press.
- Nelson, S. A., 1980. Factors Influencing Young Children's Use of Motives and Outcomes as Moral Criteria. *Child Development*, 51(3), pp. 823-829.
- Nigro, A., O'Reilly, K. & Richko, B., 2000. *New York State Intermediate Mathematics 8: Assessment Exam Review Workbook*. Farmingdale, NY: WestSea.
- Oppenzato, C. O., 2011. *Crosswalk Coach for the Common Core Standard: Mathematics, Grade 8*. New York, NY: Triumph Learning.
- Ozkan, E., 2011. Misconceptions in radicals in high school mathematics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 15(1), pp. 120-127.
- Ozkan, E. & Ozkan, A., 2012. Misconceptions and learning difficulties in radical numbers. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 46(1), pp. 462-467.
- Piaget, J., 1936. *Origins of Intelligence in the Child*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J. & Cook, M. T., 1952. *The Origins of Intelligence in Children*. New York, NY: International University Press.
- PISA, P. f. I. S. A., 2015. *PISA 2015 Results in Focus*, s.l.: Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Polya, G., 1990. *How to Solve It*. 2nd Edition ed. s.l.:Penguin Books.
- Pressley, M. & McCormick, C. B., 1995. *Advanced educational psychology for educators, researchers and policymakers*. New York: Harper Collins College Publishers.
- Primiani, A. R. & Carosico, W., 2011. *Integrated Algebra*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.
- Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M. & Fries, K. M., 2015. The Language of Mathematics: The Importance of Teaching and Learning Mathematical Vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, Volume 31, pp. 235-252.
- Rogers, J. R., 2013. Problems with pemdas. *Mathematics Teacher*, 106(8), pp. 566-567.
- Rowan, J., 1981. The leaves of spring. In: P. Reason & J. Rowan, eds. *Human inquiry: A sourcebook of new paradigm research*. New York: John Wiley & Sons, pp. 167-171.
- Rowe, M., 1974. Relation of Wait-time and Rewards to the Development of Language, Logic, and Fate Control: Part II-Rewards. *Journal of Research in Science Teaching*, 11(4), pp. 291-308.
- Rushton, N., 2014. Common errors in Mathematics. *Research Matters*, Volume 17, pp. 8-17.
- Rust, C., 2002. The Impact of Assessment on Student Learning. *Active Learning in Higher Education*, 3(2), pp. 145-158.
- Sampsel, A., 2013. Finding the Effects of Think-Pair-Share on Student Confidence and Participation. *Honors Projects*, Volume 28.
- Sarwadi, H. R. H. & Shahrill, M., 2014. Understanding Students' Mathematical Errors and Misconceptions: The Case of Year 11 Repeating Students. *Mathematics Education Trends and Research*, Volume 2014, pp. 1-10.
- Schwartzman, S., 1996. Some common algebraic misconceptions. *Mathematics and Computer Education*, 30(2), pp. 164-173.
- Seethaler, P. M., Fuchs, L. S., Star, J. R. & Bryant, J., 2011. The cognitive predictors of computational skill with whole versus rational numbers: An exploratory study. *Learning and Individual Differences*, Volume 21, pp. 536-542.

- Sirotic, N. & Zazkis, R., 2007. Irrational numbers on the number line - where are they?. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 38(4), pp. 477-488.
- Skemp, R. R., 1976. Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, Volume 77, pp. 20-26.
- Smith, F., Hardman, F., Wall Kate & Mroz, M., 2013. Interactive whole class teaching in the National Literacy and Numeracy Strategies. *British Educational Research Journal*, 30(3), pp. 395-411.
- Stephens, A. C., 2005. Developing students' understanding of variable. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(2), pp. 96-100.
- Stephens, A. C., 2005. Developing students' understanding of variable. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(2), pp. 96-100.
- Suresh, K. P. & Chandrashekara, S., 2012. Sample size estimation and power analysis for clinical research studies. *J Hum Reprod Sci*, Volume 5, pp. 7-13.
- Sutton, K., 2012. *A Study of Students' Misconceptions Regarding Variables in the Pythagorean Theorem and Slope/Intercept Formula*. Fredonia, New York: MSc Thesis, State University of New York.
- Swan, M., 2001. Dealing with Misconceptions in Mathematics. In: P. Gates, ed. *Issues in Mathematics Teaching*. London: Routledge, pp. 147-165.
- Swan, M., 2006. *Collaborative Learning in Mathematics*. London: National Institute of Adult Continuing Education.
- Taba, H. & Noel, T., 1957. *Action research: A case study*. Washington, DC: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Taff, J., 2017. Rethinking the Order of Operations. *Mathematics Teacher*, 111(2), pp. 126-132.
- Threadgill-Sowder, J., 1985. Individual differences in mathematical problem solving. In: E. A. Silver, ed. *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*. s.l.:Erlbaum, pp. 331-344.
- van der Walt, M., 2009. Study orientation and basic vocabulary in mathematics in primary school. *South African Journal of Science and Technology*, Volume 28, pp. 378-392.
- Virgen, M. A. G., 2006. Irrational Numbers and Symmetry in Pythagorean Doctrine. In: G. Orozco, ed. *Gozne*. s.l.:Turner Press.
- Waxman, H., Freiberg, H., Vaughan, J. & Weil, M., 1988. *Images of reflection in teacher education*. Reston, VA: Association of Teacher Educators.
- Weade, R. & Green, J., 1989. *Action research and the search for meaning*, San Fransisco, CA: American Educational Research Association.
- William, D., 2006. *Mathematics inside the black box: Assessment for learning in the mathematics classroom*. s.l.:Granada Learning.
- Winter, R., 1987. *Action Research and the Nature of Social Inquiry: Professional Innovation and Educational Work*. Aldershot: Avebury.
- Woodruff, E., 2005. MANIFOLD RELATIONAL UNDERSTANDING: Moving beyond the mind-as-container metaphor in Educational Technology. In: *International and Interdisciplinary Conference on Adaptive Knowledge Representation and Reasoning*. Espoo, Finland: s.n., pp. 15-17.
- Zazkis, R. & Campbell, S., 1996. Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), pp. 540-563.
- Zazkis, R. & Hazzan, O., 1998. Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), pp. 429-439.
- Zhang, D. Z., Li, S. Q. & Tang, R. F., 2004. The "two basics": Mathematics teaching and learning in mainland China. In: L. Fan, N. Wong, J. Cai & S. Li, eds. *How Chinese learn mathematics*. Singapore: World Scientific, pp. 189-207.
- Zhan, L., Guo, D., Chen, G. & Yang, J., 2018. Effects of Repetition Learning on Associative Recognition Over Time: Role of the Hippocampus and Prefrontal Cortex. *Frontiers in Human Neuroscience*, 12(277), pp. 1-14.
- Zwack, T., 2009. *Geometry Teacher's Edition - Common Errors*. California: CK-12.